О. А. Антонова

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА В XX в.

История логики XX в. во многом представляет собой историю развития теории логического вывода. Результатом развития теории логического вывода стали в настоящее время широко известные и используемые методы доказательства — аксиоматический, натуральный, секвенциальный и табличный. Поэтому попытка реконструировать историю развития логики XX в. через призму именно данных методов доказательства, на мой взгляд, достаточно интересна и небесполезна.

Аксиоматический метод, предложенный Д. Гильбертом в 30-е годы, стал первым методом доказательства в теории логического вывода. Если кратко охарактеризовать данный метод доказательства, то его основная идея заключается в том, что истинные формулы выводятся из некоторого множества формул, которые являются логическими аксиомами, посредством применения нескольких правил вывода. Формально все логические исчисления гильбертовского типа задаются конечным списком аксиом, конечным списком правил вывода и определением, что такое вывод.

Выводом формулы A из множества формул Γ называется такая последовательность формул $A_1, \ldots, A_n$, что A_n есть A и для любого i A_i есть либо аксиома, либо элемент Γ, либо непосредственное следствие некоторых предыдущих формул по одному из правил вывода. Члены Γ называются гипотезами или посылками вывода. Здесь необходимо добавить следующую важную деталь: если A выводима из множества посылок Γ, то она также будет выводима, если мы добавим к Γ новые посылки.

В настоящее время известно большое количество разнообразных исчислений гильбертовского типа с разными наборами аксиом; что касается правил вывода, то разнообразия здесь значительно меньше. Практически все исчисления этого типа содержат либо одно правило, называемое в традиционной логике modus ponens, или правило удаления импликации, либо два: правило удаления импликации и правило подстановки. Правило подстановки означает, что формула, полученная из некоторой теоремы заменой всех переменных произвольными формулами, также будет теоремой. Очевидно, что правило подстановки необходимо в тех системах, где аксиомы рассматриваются как конкретные формулы. Исчисления, которые имеют в качестве аксиом схемы аксиом, не нуждаются в правиле подстановки.

Аксиоматический вывод как метод доказательства имеет свои преимущества и недостатки. Отметим их. Обладая одним достаточно существенным преимуществом, которое состоит в значительной технической простоте описания вывода (вывод из аксиом можно построить, используя одно, максимум два правила), вся процедура поиска доказательств в этих системах достаточно сложна и громоздка. Кроме того, алгоритм поиска вывода во многом зависит от личного опыта и изобретательности. При этом поиск доказательства осложняется еще в значительной мере тем, что фактически не существует никаких предписаний о том, как вести доказательство или опровергать формулы.

Из всего вышеизложенного следует, что аксиоматический метод является «неестественным» не только с точки зрения тех рассуждений, которыми мы пользуемся в обычной жизни, но и, что более обидно, с точки зрения математических рассуждений, так как реальные математические доказательства не строятся на основании логических аксиом, но, скорее, используют промежуточные гипотезы (допущения).

Это привело к поиску нового, более совершенного метода доказательства. Таким образом, именно отсутствие формализма, который был бы ближе к применяющимся в действительности рассуждениям при математических доказательствах, стало причиной возникновения различных вариантов натурального исчисления и, соответственно, метода натурального вывода, к которому мы теперь непосредственно и переходим.

Системы натурального вывода были открыты независимо друг от друга в начале 30-х годов польским логиком С. Яськовским и немецким математиком Г. Генценом. Натуральный вывод в значительной степени отличался от аксиоматического вывода. Так, в противоположность выводам в рамках аксиоматического метода, натуральные выводы исходят не из аксиом, а из допущений, из которых делаются логические заключения, затем же посредством дальнейших заключений результат становится независимым от допущений. Несмотря на серьезные различия в процедуре построения данных двух типов вывода, основные правила натуральных исчислений производны в соответствующих аксиоматических исчислениях.

С точки зрения усовершенствования процесса поиска вывода натуральный метод оказался более действенным, поскольку выводы, полученные посредством такого метода, оказываются, как правило, короче, чем выводы на основе аксиоматического метода. И, главное, что значительно облегчает поиск вывода в этих системах: метод натурального вывода уже содержит некоторые определенные предписания о том, как строить доказательство.

Также следует отметить, что именно исследование натурального метода доказательства приводит Генцена к идее, которая сыграла важную роль в теории логического вывода, а именно к идее доказательства теоремы о нормальной форме, или *основной теоремы*. Генцен пишет: «В основной теореме утверждается, что каждое чисто логическое доказательство может быть приведено к некоторой определенной, хотя и не однозначно, нормальной форме. Наиболее существенное свойство такого нормального доказательства можно выразить так: оно не содержит окольных путей. В него не вводится никаких понятий, кроме тех, которые содержатся в конечном результате и поэтому с необходимостью должны быть использованы для получения этого результата»[1].

Парадоксально то, что натуральный метод привел к открытию *основной теоремы*, как было сказано выше, но натуральное исчисление оказалось совершенно непригодным для того, чтобы в подходящей форме сформулировать и доказать *основную теорему*. Таким образом, Генцену пришлось сформулировать особый метод — секвенциальный.

Секвенциальные исчисления были впервые рассмотрены Генценом в той же самой работе («Исследования логических выводов»), что и натуральные исчисления. В отличие от системы натурального вывода секвенциальный метод доказательства не содержит допущений, хотя и сохраняет присущее натуральному выводу деление способов заключения на введение и удаление логических знаков. Правилам введения логических символов исчисления естественного вывода отве-

---

[1] *Генцен Г.* Исследования логических выводов // Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 10.

чают фигуры введения в сукцедент, а правилам удаления — фигуры введения в антецедент. Поиск вывода в секвенциальном исчислении происходит аналогично натуральному.

В секвенциальном исчислении используется представление вывода в виде дерева, но здесь при движении вниз по дереву переходят не от формулы к формуле, а от выводимости к выводимости. Таким образом, в этом исчислении происходит «вывод выводимостей». Д. Правиц в связи с этим отмечает: «Доказательство в исчислении секвенций можно рассматривать как инструкцию по конструированию соответствующего натурального вывода... Можно сказать, что доказательство в исчислении секвенций предписывает (в некоторой степени) определенный порядок построения соответствующего натурального вывода. Этот порядок часто не релевантен и только частично отражается в соответствующем натуральном выводе. Таким образом, различные выводы в секвенциальном исчислении могут соответствовать (в указанном смысле) одному и тому же натуральному выводу»[2].

Рассмотрев логическую историю развития данных методов доказательства — аксиоматического, натурального и секвенциального, необходимо подвести небольшой итог. С практической точки зрения, которая заключается в эффективном поиске вывода, аксиоматический метод намного менее действен, чем, например, натуральный метод или секвенциальный. Каждая секвенция в секвенциальном исчислении «происходит» непосредственно из другой обозначенной формулы, подформулой которой она является. Таким образом, достигаются простота и прозрачность вывода. Хотя и присутствует некоторая свобода в выборе, с какой из формул работать далее, количество альтернатив всегда ограничено.

Что же касается систем гильбертовского типа, то ситуация здесь намного усложняется. В качестве примера рассмотрим правило modus ponens, которое является основным правилом исчислений гильбертовского типа. Чтобы доказать Y, мы должны найти такую X, для которой обе X и $X \supset Y$ доказуемы и при этом $X \supset Y$ заведомо не является подформулой Y; в принципе и X не является таковой. Стало быть, системы гильбертовского типа не обладают свойством подформульности, и поэтому доказательства в данных исчислениях не состоят только из формул, являющихся подформулами доказываемой формулы. Следовательно, существует «бесконечно» много вариантов формулы X. Также отметим, что формула X может быть намного более сложной,

[2] *Правиц Д.* Натуральный вывод. М., 1997. С. 83.

чем Y. В натуральном и секвенциальном выводах добавленные формулы всегда проще, чем формулы, из которых они исходят. Следует отметить и еще одну важную черту: если правила при построении натурального или секвенциального вывода применяются корректно, то любая наша попытка доказательства будет успешной.

Несмотря на то что секвенциальный метод доказательства «зарекомендовал» себя как весьма эффективный, он обладал одним достаточно существенным недостатком. Этот недостаток и послужил, возможно, косвенной причиной возникновения нового метода доказательства — табличного. Что же такое табличный метод? Прежде всего, табличный метод — формальная процедура доказательства, которая на сегодня существует во многих вариантах и для различных логик. Однако табличный метод имеет также несколько характерных свойств, которые практически никогда не изменяются.

Во-первых, табличный метод есть опровергающая процедура. Чтобы доказать, что некоторая формула, например X, истинна, необходимо сначала предположить, что это не так, а именно — что она ложна. Далее, формула, выражающая неистинность X, разбивается синтаксически на множество формул, которые в большинстве своем являются подформулами данной формулы, как в секвенциальном выводе. Таким образом, происходит процесс расширения таблицы, т. е. переход от формул к их подформулам. Закрытая таблица, начинающаяся с формулы, утверждающей, что X не истинна, есть табличное доказательство X.

Существует второй, семантический аспект рассмотрения табличного метода, который, к несчастью, сыграл в истории развития теории логического вывода меньшую роль, чем первый. Табличный метод, рассмотренный с семантической точки зрения, представляет собой процедуру поиска для моделей. В этом случае каждая ветвь таблицы может быть рассмотрена в качестве частичного описания модели.

Очевидно, что два данных аспекта, а именно синтаксический, рассматривающий табличную процедуру как доказательную, и семантический, рассматривающий ее как процедуру поиска модели, непосредственно связаны между собой. Если мы используем таблицы, чтобы найти модель, в которой формула X ложна, и получаем закрытую таблицу, то, следовательно, такой модели не существует и, стало быть, мы доказали, что формула X должна быть истинной.

Таблицы стандартно представляют в виде ветвящегося дерева с обозначенными формулами в точках; кроме того, табличный метод часто относят к «древесным» методам. При этом дерево можно рассматривать как «дизъюнкцию» ветвей, а ветвь определить как «конъюнкцию» обозначенных на ней формул. Поскольку точка, а также соответствующая ей формула могут быть общими для нескольких ветвей, то, хотя они и являются составляющими нескольких конъюнкций, фактически они встречаются только один раз.

Важно отметить, что табличные правила не детерминированы. Они говорят, что может быть сделано, но не что должно быть сделано. На каждом уровне мы выбираем обозначенную формулу на ветке и применяем к ней правило. Так как порядок выбора произвольный, может существовать несколько таблиц для единственной обозначенной формулы. Существуют некоторые приоритеты, налагаемые на применение правил, однако их нельзя полагать как общий принцип.

В общем случае таблицу также можно рассматривать просто как множество множеств обозначенных формул: таблица — множество ветвей, ветвь — множество обозначенных формул, которые встречаются на ней. Семантически это можно представить следующим образом: множество ветвей представляет собой дизъюнкцию его членов, а множество точек (формул), содержащихся на этих ветвях, представляет собой конъюнкцию обозначенных формул.

В отличие от таблиц, рассматриваемых как множество множеств обозначенных формул, таблицы-деревья обладают некоторыми значительными преимуществами. Во-первых, таблица-дерево не занимает большое количество площади, так как формула, написанная однажды, может быть общей для нескольких ветвей. Во-вторых, таблица-дерево сохраняет время поиска вывода, поскольку с ростом дерева формулы не копируются снова и снова. Вместо этого состояние дерева в любой момент показывает нам точку последовательности табличного расширения. Поэтому с точки зрения поиска вывода и построения алгоритма дерево-таблица наиболее эффективна.

Однако нельзя отождествлять таблицы и деревья. Дерево — это скорее форма «выражения» таблиц или других процедур доказательства. Также важно отметить, что для некоторых логик версия дерева может быть не самой лучшей. Наконец, необходимо помнить, что то, что хорошо для доказательства «рукой», может оказаться неполезным для «машины».

История развития теории логического вывода начинается, несомненно, с Г. Генцена и его исследований, посвященных натуральному и секвенциальному методам доказательства. Однако, предваряя следующие наши рассуждения, необходимо отметить важную деталь:

логический вывод рассматривался Генценом только с теоретико-доказательной точки зрения, при этом не затрагивались другие аспекты построения вывода, например семантические. Генцен занимался анализом логических доказательств, и его исследования стали фундаментом современной теории доказательств.

Другой не менее известный голландский математик — Э. В. Бет рассматривал вывод уже не только с точки зрения теоретико-доказательной, но и с семантической. Очевидно, что введенные Бетом в качестве еще одного метода доказательства таблицы имели целью именно семантический анализ вывода. Семантические таблицы Бета, которые по сути являются систематической процедурой построения контрпримера, дают разрешающую процедуру для пропозициональной логики. Что касается первопорядковой логики, то, если контрпримера не существует, табличная конструкция может никогда не закончиться. Бет впервые указал на тесную связь между семантическими таблицами и секвенциальными исчислениями, а также между семантическими таблицами и системами натурального вывода. Однако последнее отношение не настолько очевидно, насколько это первоначально предполагалось Бетом.

Обратим внимание еще на один результат, полученный Бетом и непосредственно связанный с таблицами: Бет впервые предложил вариант доказательства элиминационной теоремы, который основывается на таблицах. Второй вариант табличной элиминационной теоремы был создан Р. Смаллианом намного позже.

Практически одновременно с Бетом Я. Хинтикка предложил другой метод семантического анализа доказательства — модельное множество. Основная идея модельного множества состоит в том, что доказательство формулы X представляет собой систематическую попытку построить модель, в которой истинна $\neg X$. Если такая попытка не удается, истинна X.

Фактически семантические таблицы Бета и модели Хинтикки составляют первый, так называемый семантический этап развития табличного метода. Несмотря на полезность с точки зрения семантического анализа вывода, на практике оба данных метода оказались недостаточно удобными. Так, семантические таблицы Бета представляют собой довольно громоздкие табличные конструкции, разделенные на две части (колонки), из которых левая соответствует истине, а правая — лжи. Хотя модель Хинтикки имеет структуру дерева, что, несомненно, делает ее намного более удобной для применения на практике, множество находящихся в точках дерева формул требует частого копирования, а это фактически усложняет поиск вывода.

Достижение технической простоты и элегантности формы таблиц было целью следующего — аналитического — этапа в развитии табличного метода. Так же как и на предыдущем этапе, эта цель была достигнута независимо друг от друга двумя логиками — С. Лисом и Р. Смаллианом.

Следуя Бету, Лис делил формулы на две категории, но в отличие от Бета он не разделял их на две колонки, а сохранял вместе и обозначал арифметическими знаками. Лис использовал арифметические обозначения «+» и «–», которые соответствуют двум обозначениям Бета — истине и лжи. Помимо правил для логических связок Лис предложил также правила для кванторов и для формул с равенством. Он впервые рассматривал систему с необозначенными формулами.

Аналогичную систему построил Смаллиан. На первый взгляд может показаться, что он лишь развил и углубил идеи, которые были некогда предложены Лисом, однако при более пристальном рассмотрении ясно, что это не совсем так. В действительности именно метод аналитических таблиц Смаллиана стал основным табличным методом классической логики.

Как уже было сказано, Смаллиан назвал свои таблицы аналитическими, подразумевая под этим, что они выполняют принцип подформульности. Как и Лис, он вводит оба вида таблиц — обозначенные и необозначенные. Вместо арифметических обозначений Лиса (+ и –) Смаллиан использует *T* и *F*.

Итак, когда техническая простота и элегантность таблиц с «классической» точки зрения были достигнуты, пришел черед рассмотреть возможность их использования в неклассических системах. Таким образом, следующий этап в развитии табличного метода состоял в расширении его на различные системы неклассических логик.

Первый, кто использовал метод таблиц для анализа систем неклассических логик, был Бет. Первые теоретико-доказательные исследования в области интуиционистской логики А. Гейтинга, Г. Генцена, А. Н. Колмогорова затрагивали только синтаксис интуиционистской логики, не касаясь ее семантики. Семантическую же модель для интуиционистской логики впервые предложил Э. В. Бет. Ему же принадлежит и первая табличная система интуиционистской логики. Бет построил ее в форме секвенциального исчисления, в котором — в отличие от секвенциального исчисления *LJ* Генцена — в сукцеденте секвенции может встречаться более одной формулы. Секвенция $A_1, A_2, \ldots, A_m \to B_1, B_2, \ldots, B_n$ истинна, если всякий раз, когда модель M выполняет конъюнкции $A_1, A_2, \ldots, A_m$, она также выполняет дизъюнкцию $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Тогда модель M будет контрмоделью для секвенции $A_m \to B_1, B_2, \ldots, B_n$, если она выполнит конъюнкцию $A_1, A_2, \ldots, A_m$, хотя и не выполнит дизъюнкцию $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Табличная система Бета непосредственно связана с интуиционистской системой G_3 Клини и системой Гейтинга. Секвенция $A_1, A_2, \ldots, A_m$ выводима в системе Бета, если и только если она выводима в интуиционистской системе G_3 Клини. Бет предложил также конструктивное доказательство эквивалентности его системы системе Генцена и доказал разрешимость и полноту интуиционистской табличной системы на основе семантического анализа.

Первая аналитическая версия табличного исчисления для интуиционистской логики была представлена М. Фиттингом. Фиттинг модифицировал табличную систему Смаллиана для интуиционистской логики, заново с конструктивной (интуиционистской) точки зрения интерпретировав логические знаки. Табличный метод Фиттинга в дальнейшем был усовершенствован в работах П. Мильоли, У. Москато, М. Орнаги, которые ввели новый знак — F_c. Хотя добавление нового знака соответственно требует введения новых правил, это компенсируется тем, что применение знака F_c в табличной системе Фиттинга уменьшает повторы, свойственные этой системе.

Табличные построения для конечнозначных логик Лукасевича были впервые рассмотрены в работе У. Сакон. В дальнейшем на основании исследований С. Сурма У. Карниелли предложил табличный алгоритм систематизации конечнозначных логик. Система, построенная Карниелли, есть, по сути, табличная версия многозначного секвенциального исчисления Г. Руссо.

Метод, предложенный Карниелли, обладает некоторыми существенными недостатками, один из которых — необходимость построения для одного доказательства нескольких таблиц. Хэнл показал, что многозначные логики могут быть исследованы более эффективным методом — с помощью таблиц, где знакам будут соответствовать не единственные истинностные значения, как в таблицах Карниелли, а множество истинностных значений. Аналогичные, хотя и несколько менее общие идеи были независимо выдвинуты П. Догерти, Н. Мюрреем и Э. Розенталь.

Историю развития и применения различных методов доказательства в системах модальной логики необходимо рассматривать в двух аспектах — синтаксическом и семантическом. Синтаксический аспект рассмотрения модальной логики, несомненно, связан с исследованиями Генцена и дальнейшими попытками расширить результаты, полученные им, на модальные логики.

Семантический «путь» исследования модальной логики берет начало в трудах Э. В. Бета, но затем прерывается до работ С. Кринке. Два направления встречаются в конце 60-х годов, когда классические семантические табличные системы фактически превратились в классические генценовские системы, и наоборот. И. Земан был первым, кто одновременно обратился к двум традициям, хотя иногда он не мог сравнить свои табличные системы с генценовскими вариантами.

С. Крипке впервые использовал метод семантических таблиц для доказательства полноты системы S_5, дополненной кванторами первого порядка и знаком равенства. Семантическая таблица для модальных систем имеет ту же функцию, что и рассмотренные ранее семантические таблицы. Семантическая таблица — это специальная схема, предназначенная для проверки того, следует ли семантически некоторая данная формула из некоторых других данных формул. Необходимое и достаточное условие, чтобы B не следовала из A_1, ..., A_n, — существование модели, в которой A_1, ..., A_n были бы общезначимы, а B не была бы общезначима. Для этого A_1, ..., A_n помещаем в левый столбец таблицы, а B — в правый столбец. С этого и начинается попытка найти контрмодель для формулы.

Я. Хинтикка расширил область применения модельного множества на системы модальной логики. Аналитические таблицы для различных систем модальной логики были предложены в работах М. Фиттинга. Первоначально Фиттинг создал префиксный вариант табличной системы, главная идея которой — обозначить возможные миры таким же способом, каким синтаксические правила определяют достижимость.

В дальнейшем Фиттинг расширил метод Смаллиана на модальные системы K, K_4, T и S_4, предложив версию для обозначенных формул. Табличный метод, созданный Фиттингом, не применим к логикам, чьи модели включают в себя симметричность отношения достижимости, например к системе S_5. Табличные правила этого метода во многом аналогичны табличным правилам для интуиционистской логики. Если S, π — множество обозначенных формул, встречающихся на ветви, то вся ветвь должна быть заменена на $S^{\#}$, π_0. Поскольку такая замена убирает одни формулы и модифицирует другие, это правило является правилом потери информации, следовательно — «деструктивным». Полнота табличной конструкции может быть доказана либо методом «систематизации» табличной конструкции, либо с помощью непротиворечивого множества. Как и в случаях классических и интуиционистских таблиц, интерполяционные теоремы и соответствующие результаты могут быть выведены из табличной формулировки.

С 80-х годов семантическая традиция стала главенствующей в области автоматического вывода, синтаксическая же традиция — в области теории типов. Это произошло во многом по причине того, что секвенциальные модальные системы не обладают всеми теми свойствами, что обычно присущи генценовским секвенциальным системам. Например, некоторые из систем не подчиняются свойству подформульности, но большинство систем не имеет разделения на правила для введения модальностей в правую и левую части секвенции.

Элегантные модальные секвенциальные системы, соответствующие этим идеям Генцена, создать не удалось, хотя А. Аврон, С. Черрато, А. Мазини, Х. Уонсинг пытаются в своих работах изменить ситуацию. Некоторые из этих методов имеют недостатки. Система Черрато обладает свойством подформульности и разделяет правила введения, но в общем случае не обладает элиминацией сечения. Системы Мазини обладают элиминацией сечения и дают прямое доказательство разрешимости, но применимы только к логикам *K* и *KD*. Системы Уонсинга обладают элиминацией сечения и ясными правилами введения, но не дают процедуру разрешения и не могут относиться к таким логикам, как $\mathrm{S}_{4.3.1}$ и $S_{4\mathrm{Dbr}}$. Гиперсеквенции Г. Поттинжера и А. Аврона, кажется, обладают большинством искомых свойств, так как они дают системы, свободные от сечений, со свойством подформульности для большинства базовых модальных логик, включая S_5.

Хотя табличный метод был создан для логики и в логике, на настоящий момент область его применения значительно расширилась. Традиционно правила табличных систем рассматриваются как шаги для построения контрмодели. Табличные системы, основными свойствами которых являются анализ и опровержение, имеют подходящую форму для построения алгоритмов доказательства теорем.

Современный этап развития теории логического вывода, который еще можно назвать постмодернистским, подразумевает «автоматизацию» методов логического вывода, или возможность их применения в автоматическом поиске вывода. Еще Бета высказывал идею автоматического доказательства теорем при помощи таблиц, но, к сожалению, она не привела к дальнейшим результатам. Любопытно отметить, что метод резолюций и метод таблиц в общераспространенной аналитической формулировке появились практически одновременно. Однако если Робинсон, открыв метод резолюций, сразу заинтересовался его автоматическим применением, то Смаллиан и Лис совершенно не обратили внимание на «автоматическую» эффективность открытого ими метода аналитических таблиц. Это во многом объясняет тот факт, что метод резолюций наиболее часто используется именно в автоматическом доказательстве теорем. В настоящее время исследования в области автоматического доказательства теорем методом таблиц являются приоритетными.

Важно также отметить, что таблицы будут продолжать играть центральную роль в области автоматического доказательства, потому что они легко модифицируются и могут использоваться для создания других методов в области автоматического доказательства теорем. Табличный метод связан с методом резолюций; как показал Г. Е. Минц, существует также связь с методом, исследованным Г. Райтсаноном, Э. Эдером, с матричным методом, рассмотренным Л. Уолленом. Развитие методов автоматического доказательства теорем, не основанных на табличном методе, но выводимых из него, — предмет исследования, который на сегодня также очень перспективен.

Однако, как ни странно, в действительности не всегда развитие новых процедур автоматического доказательства оказывается более эффективным, чем использование уже известных методов доказательства, например табличного метода. Развивать табличный метод для новых логик, в частности логик «смешанного» типа, проще, чем создавать для них новые, более эффективные процедуры доказательства. Причиной этого служит тот факт, что именно табличный метод, как никакой другой, проясняет семантические связи, лежащие в основании той или иной логической системы.

Итак, подводя итог вышесказанному, рассмотрим, какими же преимуществами обладает табличный метод по сравнению с другими методами доказательств — аксиоматическим, натуральным и секвенциальным. Одно из главных преимуществ табличного вывода — то, что в нем наиболее ярко выражается связь, существующая между семантикой и синтаксисом логического исчисления. Таким образом, именно табличный метод показывает нам те семантические связи, которые лежат в основании синтаксической структуры рассматриваемой логики. Так как правила построения табличного вывода соответствуют структуре обычных содержательных рассуждений, выводы, полученные методом таблиц, оказываются более естественными, чем, например, выводы в рамках аксиоматического метода.

Табличный вывод, так же как и секвенциальный, обладает свойством подформульности: в процессе вывода исходная формула разбивается на свои подформулы. Таким образом, в построении вывода с помощью табличного метода не участвуют более сложные формулы, чем исходная (доказываемая), и каждый шаг построения вывода детерминирован конечным числом альтернатив дальнейших логических шагов. Если мы систематически применяем все правила построения табличного доказательства и при этом доказательство существует, то очевидно, что оно обязательно будет найдено. Но если доказательство не существует, тогда процесс построения вывода может никогда не закончиться. В таком случае табличный метод дает нам полуразрешающую процедуру. Применение кванторных правил (γ-правила) в автоматическом поиске вывода связано со значительными трудностями. Таблицы со свободными переменными помогают решить эту проблему.

Доказательства многих базовых теорем при использовании табличного метода значительно упрощаются. Так, Смаллиан, пользуясь методом таблиц, доказал теоремы полноты, теорему компактности, интерполяционную теорему и *основную теорему*.

Табличные исчисления освобождают нас от необходимости многократного переписывания формул, появляющихся в выводе, что приходится делать в секвенциальных исчислениях. Это свойство табличных исчислений намного сокращает вывод и делает его простым и ясным. Именно легкость и простота доказательства при помощи таблиц служат преимуществами их использования во многих областях логики, и не только.

История развития теории логического вывода, начиная свое существование с работ Г. Генцена, затем продолжает интенсивно развиваться в семантических исследованиях Э. В. Бета и Я. Хинтикки. С. Лис и Р. Смаллиан придают табличному методу доказательства такую форму, что он становится самым элегантным методом доказательства. Таблицам становится тесно в рамках классической логики, и они распространяются на многие неклассические логики, параллельно развивая отношение с другими техниками доказательства и раскрывая тем самым возможности своей «автоматизации».

Изобретение различных вариантов табличных систем для неклассических логик, а также их модификаций продолжается. Существует, с одной стороны, что-то «мистически» непонятное, а с другой стороны, вполне естественное в том, что именно табличный метод возник из двух источников — теории доказательств и семантических идей, предложенных Э. В. Бетом и Я. Хинтиккой. Возрастающий интерес к области автоматического доказательства теорем для неклассических логик выносит табличный метод на первое место, и это, несомненно, связано с эффективным применением табличного метода во многих неклассических логиках. Создание новых методов доказательства, развитие уже известных — все это активно исследуемые области современной теории логического вывода.